ガロア表現に関係した写像類群のいくつかの性質(数論的部分群との比較等)及び関連した話題 (代数的整数論とその周辺)

朝田, 衛; 山ノ井, 克俊

数理解析研究所講究録
1097 巻 1999 年 166-176

ガロア表現に関係した写像類群のいくつかの性質
(数論的部分群との比較等) 及び関連した話題

朝田 衞 京都工芸繊維大学工芸学部
山ノ井 克俊 京都大学数理解析研究所
(博士課程 2 年)

R を種数 g (≥ 0) のコンパクトリーマン面、$\{P_1,...,P_n\}$ を R 上の順序付けられた相異なる n (≥ 0) 個の点とします。R と $\{P_1,...,P_n\}$ の組に対して、その写像類群と呼ばれる有限生成な離散群が定まります。この群と数論的部分群との類似はトポロジーの分野でもいろいろと研究されています。(例えば Ivanov[Iv1] 参照。) この講演では、これら 2 種類の群について、その congruence subgroup property (とその類似) 及び外部自己同型群の有限性という 2 つの性質をとりあげました。

写像類群は (名前の示すとおり) R の可微分自己同型の類がなす群ですが、Nielsen 等の結果により、$R\setminus\{P_1,...,P_n\}$ の基本群 $\pi_1(g,n)$ の外部自己同型群のある部分群としてとらえられます (§1)。数論的部分群、例えば $SL_n(\mathbf{Z})$ などが自由加群 $\mathbf{Z}^n$ の自己同型群の部分群であるのに対し、写像類群は (一般には) 非可換な群 $\pi_1(g,n)$ の (外部) 自己同型群の部分群であるというわけです。これから自然に、数論的部分群における合同部分群問題の類似を写像類群について考えることができます (§2)。§3 では、この問題があるガロア表現の忠実性を問う問題と同じになることを説明します。§4 では、$SL_n(\mathbf{Z})$、写像類群、およびそれと類似した自由群および自由メタアーベル群の自己同型群各々について、その外部自己同型群の有限性について述べます。

§1 写像類群

この § では写像類群の定義、及びそれが基本群の外部自己同型群の部分群としてとらえられるという Nielsen 等の定理を復習します (Birman[Bi1, Ch.4], [Iv1] 参照)。

$R,\{P_1,...,P_n\}$ は前に述べたとおりとします。R の向きを保つ可微分自己同型写像で $P_1,...,P_n$ を各々固定するもの全体は写像の合成に関して群をなします。これを $\mathrm{Diffeo}^+(R,\{P_1,...,P_n\})$ と書きます。この群の元で恒等写像に homotopic なもの全体 $\{f \mid f\sim 1\}$ は正規部分群をなしますが、$(R,\{P_1,...,P_n\})$ の写像類群 $\Gamma_{g,n}$ はその商群として定義されます;

$$\Gamma_{g,n} = \mathrm{Diffeo}^+(R, \{P_1, ..., P_n\})/\{f \mid f \sim 1\}.$$

$\Gamma_{g,n}$ は Teichmüller 空間と呼ばれる複素ユークリッド空間内の単連結領域 $T_{g,n}$ に解析的変換群として作用し、その商空間が n 点付き種数 g のリーマン面の moduli 空間となることが知られています。(それゆえ Teichmüller modular 群とも呼ばれます。) 最も古典的な例は $(g,n) = (1,0)$ の場合で、このときは $T_{1,0} = H$ (上半平面)、$\Gamma_{1,0} \simeq SL_2(\mathbf{Z})$ となり、$SL_2(\mathbf{Z})$ の H への作用は通常の 1 次分数変換によるものです。

$R \setminus \{P_1, ..., P_n\}$ の基本群を $\pi_1(g,n)$ とし、$\mathrm{Aut}(\pi_1(g,n))$, $\mathrm{Int}(\pi_1(g,n))$, $\mathrm{Out}(\pi_1(g,n))$ を各々 $\pi_1(g,n)$ の自己同型群、内部自己同型群、外部自己同型群とします ($\mathrm{Out}(\pi_1(g,n)) = \mathrm{Aut}(\pi_1(g,n))/\mathrm{Int}(\pi_1(g,n))$)。$\mathrm{Diffeo}^+(R, \{P_1, ..., P_n\})$ の元は $\pi_1(g,n)$ の代表である閉じた道を別の閉じた道に移しますから、これより $\Gamma_{g,n}$ が $\pi_1(g,n)$ の外部自己同型を引き起こします;

$$\Gamma_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(g,n)) \tag{1.1}$$

($\mathrm{Diffeo}^+(R, \{P_1, ..., P_n\})$ の元は基点を動かしてしまうので、内部自己同型群のズレが生じます。) この準同型の像は部分群

$$\mathrm{Out}^*(\pi_1(g,n)) = \{\sigma \in \mathrm{Aut}(\pi_1(g,n)) \mid \sigma \text{ は (i), (ii) を満たす }\}/\mathrm{Int}(\pi_1(g,n))$$

$$\text{(i) } \sigma(z_j) \sim z_j \quad (1 \leq j \leq n)$$
$$\text{(ii) " } \textit{orientation preserving} \text{ "}$$

に含まれます。ただし、z_j は点 P_j のまわりを (正の向きに) 1 回まわる道で代表される $\pi_1(g,n)$ の元とし、$\sim$ は共役を表わします。また条件 (i) より、$\Gamma_{g,n}$ は R の 1 次ホモロジー群 $H_1(R,\mathbf{Z})$ に作用し、それは intersection form

$$H_1(R,\mathbf{Z}) \times H_1(R,\mathbf{Z}) \longrightarrow H_2(R,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$$

と compatible ですが、条件 (ii) は $\Gamma_{g,n}$ が $H_2(R,\mathbf{Z})$ に自明に作用することを意味します。

このとき、

定理 (Nielsen,... [Bi2,1.4]) 準同型 (1.1) は同型 $\rho^N_{g,n} : \Gamma_{g,n} \simeq \mathrm{Out}^*(\pi_1(g,n))$ を与える。

が成り立ちます。

§ 2 合同部分群問題の類似

まず数論的部分群の合同部分群問題を、$SL_n(\mathbf{Z})$ を例にとって復習しておきます。$N = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\Gamma(N) = \{\ A \in SL_n(\mathbf{Z}) \mid A \equiv 1_n \bmod N\ \}$$

とおきます（1_n : n 次単位行列)。$\Gamma(N)$ は level N の主合同部分群と呼ばれる $SL_n(\mathbf{Z})$ の指数有限正規部分群で、それゆえ $\Gamma(N)$ を含む部分群は指数有限です。逆に $SL_n(\mathbf{Z})$ の任意の指数有限部分群はある $\Gamma(N)$ を含むか、というのが合同部分群問題です。$n = 2$ の場合には否定的であることが古くから知られていますが、$n \geq 3$ の場合には肯定的であることが Bass-Lazard-Serre[BLS], Mennicke[M] によって示されています。

$SL_n(\mathbf{Z})$ は階数 n の自由加群 $\mathbf{Z}^n$ に作用していますが、$\Gamma(N)$ はその指数有限特性部分群 $N\mathbf{Z}^n$ による商群に自明に作用するもの全体がなす部分群に他なりません。そこで、$\Gamma_{g,n}$ における自然な類似としては次のようなものが考えられます。K を $\pi_1(g,n)$ の任意の指数有限特性部分群とすると、$\Gamma_{g,n}$ は 商群 $\pi_1(g,n)/K$ の外部自己同型を引き起こし、準同型

$$\Gamma_{g,n} \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(g,n)/K)$$

が定まります。この核は $\Gamma_{g,n}$ の指数有限正規部分群ですが、これを（この小文では）$\Gamma(K)$ と書きます。そうすると、合同部分群問題の類似として、

問題　$\Gamma_{g,n}$ の任意の指数有限部分群 Γ はある $\Gamma(K)$ を含むか？

が考えられるわけです。

$(g,n) = (1,0)$ の場合は $\Gamma_{1,0} = SL_2(\mathbf{Z})$($\pi_1(1,0) = \mathbf{Z}^2$) ですから上に述べたように答は否定的です。$g = 0,\ n \leq 3$ の場合は $\Gamma_{g,n}$ は自明な群になるので除外するとそれ以外の場合は $2 - 2g - n < 0$ の場合です。(これは $\pi_1(g,n)$ が非可換のときです。) この場合は、一般的にはわかっていませんが、$\Gamma_{g,n}$ について肯定的であれば、$\Gamma_{g,n+1}$ についても肯定的であること、$g = 0, 1$ の場合は肯定的であること、が知られています ([A])。

§ 3 ガロア表現との関係

(3-1) 例として、$(g,n) = (0,4)$ の場合をとりあげます。$\bar{\mathbf{Q}}$（有理数体 $\mathbf{Q}$ の代数閉包）上の 1 変数有理関数体を $k = \bar{\mathbf{Q}}(\lambda)$ とし、Ω を k の $\lambda = 0, 1, \infty$ の外で不分岐な最大のガロア拡大体とします。Ω 上の 1 変数有理関数体 $\Omega(t)$ に対して、拡大体 M_Ω で条件

M_Ω は $k(t)$ 上ガロア

$M_\Omega\bar{\Omega}$ は $\bar{\Omega}(t)$ の $t=0,1,\infty,\lambda$ の外で不分岐な最大のガロア拡大体

を満たすものが唯一つ存在することが示されます。（言い換えれば、Ω は $M_\Omega\bar{\Omega}$ の定義体（の 1 つ）です。）従って拡大体の列

$$k(t) \subset \Omega(t) \subset M_\Omega$$

及びガロア群の完全列

$$1 \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_\Omega/\Omega(t)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(M_\Omega/k(t)) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\Omega(t)/k(t)) \longrightarrow 1 \tag{3.1}$$

が得られるわけです。$\mathrm{Gal}(M_\Omega/k(t))$ を、共役をとることにより正規部分群 $\mathrm{Gal}(M_\Omega/\Omega(t))$ に作用させると、$\mathrm{Gal}(M_\Omega/\Omega(t))$ は内部自己同型として作用しますから、準同型（ガロア表現）

$$\rho_{0,4} : \mathrm{Gal}(\Omega/k) \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathrm{Gal}(M_\Omega/\Omega(t)))$$

が得られます。この表現について、これが忠実か否かという問題を考えると、それが $\Gamma_{0,4}$ において合同部分群問題の類似を問うことと同じになります。それは、この表現が以下に述べるような幾何的な表現から自然に得られるものだからです。

$\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ を複素数体 $\mathbf{C}$ 上の射影直線とし、

$$\begin{aligned} X &= \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0,1,\infty\} \\ Y &= X \times X \setminus \Delta \quad (\Delta : \mathit{diagonal}) \end{aligned}$$

とおきます。射影 $Y \longrightarrow X$ により、Y は X 上の fiber space となり、X 上の点 λ_0 の上の fiber は $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0,1,\infty,\lambda_0\}$ です。このとき、X, Y 及び fiber の基本群について、homotopy 完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0,1,\infty,\lambda_0\}) \longrightarrow \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow 1 \tag{3.2}$$

が成り立ちます。前と同様に、$\pi_1(Y)$ を共役をとることにより $\pi_1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0,1,\infty,\lambda_0\}) = \pi_1(0,4)$ に作用させると、準同型

$$\pi_1(X) \longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1(0,4)) \tag{3.3}$$

が得られます。

実は X, Y は各々 4 点及び 5 点付き種数 0 のリーマン面の moduli 空間で、射影 $Y \to X$ は「1点を忘れる」ことから生ずるものに他なりません。また、$\pi_1(X) \simeq \Gamma_{0,4}$ で、上の準同型が § 1 の定理で述べた $\rho_{0,4}^N$ と本質的に同じものとなります。

さて、一般に群 G に対して、その profinite completion を $\hat{G}$ と表わすと、完全列 (3.2) から、完全列

$$1 \longrightarrow \hat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0,1,\infty,\lambda_0\}) \longrightarrow \hat{\pi}_1(Y) \longrightarrow \hat{\pi}_1(X) \longrightarrow 1 \qquad (3.2)^*$$

が得られます。($\hat{\pi}_1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}} \setminus \{0,1,\infty,\lambda_0\})$ の中心が自明であることによります (Anderson[An])。このとき、$\hat{\pi}_1(Y)$ から $\mathrm{Gal}(M_\Omega/k(t))$ への同型で、完全列 (3.2)* から完全列 (3.1) への同型を与えるものが存在することが示されます。それゆえ、$\rho_{0,4}$ は準同型 (3.3) (即ち $\rho_{0,4}^N$) から自然に誘導される

$$\hat{\pi}_1(X) \longrightarrow \mathrm{Out}(\hat{\pi}_1(0,4)) \qquad (3.4)$$

に他なりません。容易にわかるように、これが単射であることと、$\Gamma_{0,4}$ において合同部分群問題が肯定的であることが同値になります。

(3-2) 表現 $\rho_{0,4}$ 、即ち準同型 (3.4) が忠実であることの証明の概略を述べます。$\mathrm{Out}^*(\hat{\pi}_1(0,4))$ を $\mathrm{Out}^*(\pi_1(0,4))$ と同様に定義される $\mathrm{Out}(\hat{\pi}_1(0,4))$ の部分群とすると、(3.4) の像はこの部分群に含まれています。さて、$\mathrm{Out}^*(\hat{\pi}_1(0,4))$ の元 σ に対して、z_4 を固定する代表 $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Aut}(\hat{\pi}_1(0,4))$ を取り、$\hat{\pi}_1(0,4)/ < z_4 >_{normal} \simeq \hat{\pi}_1(0,3)$ への作用を考えます。 このとき、この作用と (3.4) との合成

$$\hat{\pi}_1(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\hat{\pi}_1(0,3))$$

が、$\hat{\pi}_1(X) = \hat{\pi}_1(0,3)$ と見なして、共役をとる作用になっていることが幾何的な考察からわかります。そうすると $\hat{\pi}_1(0,3)$ の中心が自明なことから、この合成、従って (3.4) の忠実性がわかるわけです。

(3-3) 一般の (g,n) についても、表現 $\rho_{0,4}$ に相当するものが構成されていますのでそれを説明します。(Oda[O1,O2] 参照。) $\mathcal{M}_{g,n}/\mathbf{Q}$ を n 点付き完備代数曲線の moduli stack とし、forgetful morphism $\mathcal{M}_{g,n+1} \to \mathcal{M}_{g,n}$ を考え、$\mathcal{M}_{g,n}$ の geometric point μ の上の fiber を C_μ とします。このとき、$\mathcal{M}_{g,n}, \mathcal{M}_{g,n+1}, C_\mu$ の代数的基本群についても、homotopy 完全列

$$1 \longrightarrow \pi_1^{alg}(C_\mu) \longrightarrow \pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n+1}/\mathbf{Q}) \longrightarrow \pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}/\mathbf{Q}) \longrightarrow 1$$

が成り立ちます。($\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}/\mathbf{Q})$ を $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})$ に置き換えても同じ完全列が成り立ち、それの $(g,n)=(0,4)$ の場合が $(3.2)^*$ です。）これより前と同様にして、$\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}/\mathbf{Q})$ の表現

$$\varphi_{g,n}:\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}/\mathbf{Q})\longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1^{alg}(C_\mu))$$

が得られます。これは代数曲線の普遍族に付随した monodromy 表現と呼ばれます。

$\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}/\mathbf{Q})$ は $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})$ を正規部分群として含み、商群として $\mathbf{Q}$ の絶対ガロア群が表われます。そして、$\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})$ は $\Gamma_{g,n}$ の profinite completion と同型になります（[O1]）；

$$\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})\simeq\hat{\Gamma}_{g,n}.$$

従って、上の $\varphi_{g,n}$ を $\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})$ に制限したもの

$$\rho_{g,n}:\pi_1^{alg}(\mathcal{M}_{g,n}\times_{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})\longrightarrow \mathrm{Out}(\pi_1^{alg}(C_\mu))$$

が $\rho_{g,n}^N$ から自然に誘導される準同型

$$\hat{\Gamma}_{g,n}\longrightarrow \mathrm{Out}(\hat{\pi}_1(g,n))$$

に他なりません。それゆえ一般の (g,n) についても、$\rho_{g,n}$ が忠実か否かという問題が $\Gamma_{g,n}$ において合同部分群問題の類似を問う問題と同じになるわけです。

より一般に $\varphi_{g,n}$ が忠実か否かという問題が考えられます。$\varphi_{g,n}$ が忠実なら $\rho_{g,n}$ も忠実ですが、$n\geq 1$ の仮定の下では、逆に $\rho_{g,n}$ が忠実なら $\varphi_{g,n}$ も忠実であることが知られています（Matsumoto-Tamagawa[MT]）。

§4　外部自己同型群

この節では、少し話題を変えて $SL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ と $\Gamma_g = \Gamma_{g,0}$ $(g \geq 2)$ の類似を外部自己同型群の有限性という方面からみてみる。そのあとにある意味で非可換な $GL_n(\mathbb{Z})$ $(\simeq Aut(F_r/[F_r, F_r]))$ とも思える $Aut(F_r)$, $Aut(M_r)$ についても同様に外部自己同型群の有限性が成り立つことを述べる。ここで F_r はランク $r \geq 2$ の自由群で M_r はランク r $(r \geq 2, r \neq 3)$ の自由メタアーベル群、すなわち F_r の二階交換子群 $[[F_r, F_r], [F_r, F_r]]$ による商 $F_r/[[F_r, F_r], [F_r, F_r]]$ のこととする。（上で、技術的な理由により $Aut(M_3)$ の場合は除外する。$Out(Aut(M_3))$ が有限かどうかは不明。）

群 G は G 自身に内部自己同型として作用しているがそれはある意味で G の自明な自己同型をあたえているので $Aut(G)$ を内部自己同型群で割って得られる外部自己同型群 $Out(G)$ が G の非自明な対称性を表していると考えられる。それゆえ外部自己同型群がたかだか有限群であるということは G の硬さのようなものを表しているとみられる。

（１）$Out(SL_n(\mathbb{Z}))$ は有限群であることは A.Borel[Bo] 等により示された（A.Borel[Bo] はもっと一般に小数の例外を除く数論的部分群の外部自己同型群は有限であることを示し、$Out(SL_n(\mathbb{Z}))$ の有限性はその特別な場合である）。ここでは H.Bass-J.Milnor-J.P.Serre [BMS] の論文から rigidity との関係の概略を述べてみる。先ほど論じられた $SL_n(\mathbb{Z})$ の congruence subgroup property 、rigidity、外部自己同型群の有限性が絡み合っていて面白いと思うからである。（リー群の中の離散部分群が rigid とは、離散部分群の自己同型が常にリー群の自己同型に拡張されることをいう。それはつまりその離散部分群が（そのリー群の中で）非自明な変形を持たない、ということである。）

$\sigma : SL_n(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z})$ を $SL_n(\mathbb{Z})$ の自己同型とする。素数 ℓ をとって射の合成 $\sigma_\ell : SL_n(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sigma} SL_n(\mathbb{Z}) \hookrightarrow SL_n(\mathbb{Z}_\ell)$ を考えると、これは連続な射 $S\hat{L_n}(\mathbb{Z}) \to SL_n(\mathbb{Z}_\ell)$ に拡張される。ここで $\mathbb{Z}_\ell$ は ℓ 進整数環、$S\hat{L_n}(\mathbb{Z})$ は $SL_n(\mathbb{Z})$ の副有限完備化とする。ここで $SL_n(\mathbb{Z})$ の congruence subgroup property（＋近似定理）により

$$S\hat{L_n}(\mathbb{Z}) \simeq \prod_{p:\text{素数}} SL_n(\mathbb{Z}_p)$$

となるが、$p \neq \ell$ なら p 進リー群 $SL_n(\mathbb{Z}_p)$ の ℓ 進リー群 $SL_n(\mathbb{Z}_\ell)$ における像は有限群であるので多少の議論の後、σ_ℓ は連続な準同型 ϕ と自然な埋め込み　$SL_n(\mathbb{Z}) \hookrightarrow SL_n(\mathbb{Z}_\ell)$

を使ってほぼ

$$'' \quad SL_n(\mathbb{Z}) \hookrightarrow SL_n(\mathbb{Z}_\ell) \xrightarrow{\phi} SL_n(\mathbb{Z}_\ell) \quad ''$$

と分解できることが分る。ここで'ほぼ'というのは本当は $SL_n(\mathbb{Z})$ の指数有限部分群を考える必要があるということである。ところが ℓ 進リー群の理論から実は ϕ は ℓ 進解析的であることが分かり、代数群 SL_n は単連結半単純なので ϕ は $\mathbb{Q}_\ell$ 上の代数群の射であることが分る。そして、もう少し議論すると ϕ は実は $\mathbb{Q}$ 上定義されていることが分かる。以上から rigidity、つまり σ は代数群の同型 ϕ を誘導して、'ほぼ' σ は ϕ の制限であることが分かり([BMS p.136])、$SL_n(\mathbb{Z})$ の外部自己同型群の有限性が代数群 $SL_n/\mathbb{Q}$ の外部自己同型群の有限性に帰着される。

(2)写像類群 Γ_g の外部自己同型群の有限性は N.V.Ivanov[Iv2], J.McCarthy[Mc] によって示された。より正確には

$$Out(\Gamma_g) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad (g = 2)$$

$$Out(\Gamma_g) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad (g \geq 3)$$

となる。$g \geq 3$ の場合に位数2の外部自己同型がどこから生じるかを述べる。Γ_g^* を Γ_g の定義のなかで、必ずしも向きを保つとは限らない曲面の自己同型から作られるものとする。Γ_g^* には曲面の向きをひっくり返す自己同型と向きを保つ自己同型の二種類あるので、Γ_g は Γ_g^* の指数2の(正規)部分群となり Γ_g^* の元による共役を考えることで Γ_g の位数2の外部自己同型ができる。そして実はこれ以外の外部自己同型はないことが示されるのである。($g = 2$ の場合には上記の外部自己同型の他に hyper-geometric involution から外部自己同型が作られる。)証明のポイントは Γ_g の元でデーンツイストと呼ばれる幾何学的に単純に定義されるものに着目して $Aut(\Gamma_g)$ の元はデーンツイストをデーンツイストに移すことを示すことである。詳しくは [Iv2],[Mc] を参照。

(3)上記二つの例の類似が $Aut(F_r)$, $Aut(M_r)$ についても成立する。まず $Aut(F_r)$ の場合をのべると $Aut(F_r)$ の内部共役による射、

$$Aut(F_r) \rightarrow Aut(Aut(F_r)) \qquad (4.1)$$

は同型であり、特に $Out(Aut(F_r))$ は自明である(E.Formanek-J.Dyer[DF])。F_r の中心は

自明なので F_r は $Aut(F_r)$ の正規部分群とみなせ、この時 (4.1) は

$$\text{正規部分群}\quad F_r \subset Aut(F_r)\quad \text{は特性部分群である}$$

という命題と同値である。というのはもし正規部分群 $F_r \subset Aut(F_r)$ が特性部分群なら $Aut(Aut(F_r))$ は F_r に作用するので $Aut(F_r) \to Aut(Aut(F_r))$ にはセクションが出来るがこれが逆写像になることがすぐ確かめられる。逆は明らかであろう。そこで正規部分群 $F_r \subset Aut(F_r)$ が特性部分群であることを示すわけだが、そのためにまず射

$$Aut(F_r) \to Aut(F_r/[F_r, F_r]) \simeq GL_r(\mathbb{Z})$$

の核 K に着目して K が特性部分群であることを示し、それから出発して $K \cdot F_r \subset Aut(F_r)$ が特性部分群であることを示し、という具合に順々に示していって最後に F_r が特性部分群であることを示す。詳しくは [DF] を参照。

$Aut(M_r)$ についても M_r の中心が自明であることが分かるので、大筋では同じ方針で

$$Aut(M_r) \to Aut(Aut(M_r))$$

が同型であることが示される。しかし、実際にいろいろなことを証明しようとすると M_r の場合には F_r の場合のように組合せ群論的方法は使えない。そのかわりに M_r のアーベル化 $M_r^{ab} = M_r/[M_r, M_r] \simeq \mathbb{Z}^{\oplus r}$ の $\mathbb{Z}$ 上の群環 $\mathbb{Z}[M_r^{ab}] \simeq \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_r^{\pm 1}]$ を考え、マグナス表現というものを使って M_r、$Aut(M_r)$ 等のものを群環 $\mathbb{Z}[M_r^{ab}] \simeq \mathbb{Z}[x_1^{\pm 1}, \cdots, x_r^{\pm 1}]$ 上のものと表して環論的に処理する [Y]。

ここでマグナス表現を簡単に述べる。M_r の定義から $[M_r, M_r]$ は可換であり、そこには共役で自然に $M_r/[M_r, M_r]$ が作用しているので 群環 $\mathbb{Z}[M_r^{ab}]$ 上の加群とみなせる。また $K_{\mathrm{meta}} = \ker(Aut(M_r) \to Aut(M_r^{ab}))$ とすると、K_{meta} は $[M_r, M_r](\subset M_r)$ に自己同型として作用するがその作用は $\mathbb{Z}[M_r^{ab}]$ 加群 $[M_r, M_r]$ としての自己同型でもある。そして、実はこれら $[M_r, M_r]$、K_{meta} は（$\mathbb{Z}[M_r^{ab}]$ 上の構造もこめて）$\mathbb{Z}[M_r^{ab}]^{\oplus r}$、$GL_r(\mathbb{Z}[M_r^{ab}])$ にそれぞれ自然に埋め込め、その像も具体的に記述できる。これがマグナス表現である。

References

[An] M.P. Anderson, Exactness properties of profinite completion functors, Topology, 13(1974), 229–239.

[As] M. Asada, The faithfulness of the monodromy representations associated with a certain families of algebraic curves, RIMS preprint series 1179(1997).

[BLS] H. Bass, M. Lazard, J.-P. Serre, Sous-groupes d'indices fini dans $SL(n, \mathbf{Z})$, Bull. Amer. Math. Soc. 70(1964), 385-392.

[BMS] H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, Solution of congruence subgroup problem for SL_n $(n \geq 3)$ and Sp_{2n} $(n \geq 2)$, Publ. Math. I.H.E.S. 33(1967), 59–137.

[Bi1] J.S. Birman, Braids, links and mapping class groups, Ann. of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, 1975.

[Bi2] J.S. Birman, The algebraic structure of surface mapping class groups, in Discrete groups and automorphic functions W.Harvey (ed.) Academic Press, New York (1977).

[Bo] A. Borel, On the automorphisms of certain subgroups of semi-simple Lie groups, Proc. Colloqium on Algebraic Geometry, Bombay(1969), 43–73.

[DF] J. Dyer, E. Formanek, The automorphism group of a free group is complete, J. London Math. Soc. 11(1976), 181–190.

[Iv1] N. V. Ivanov, Algebraic properties of mapping class groups of surfaces, Geometric and algebraic topology, Banach center publications 18(1986), 15–35.

[Iv2] N. V. Ivanov, Automorphisms of Teichmüller modular groups, Lecture Notes in Math. 1346(1988), 199-270.

[MT] M. Matsumoto and A. Tamagawa, Mapping-class-group action versus Galois action on profinite fundamental groups, Max-Plank-Institute für Mathematik preprint series 1997(92).

[Mc] J. McCarthy, Automorphisms of surface mapping class groups. A recent theorem of N. Ivanov, Invent. Math. 84(1986), 49–71.

[Me] J. Mennicke, Finite factor groups of unimodular group, Ann. Math. 81(1965), 31-37.

[O1] T. Oda, Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves, Geometric Galois actions I, P. Lochak, L. Schneps(eds), London Math. Soc. Lect. Note Ser. 242 (1997) 85–95.

[O2] T. Oda, The universal monodromy representations on the pro-nilpotent fundamental groups of algebraic curves, Mathematische Arbeitstagung (Neue Serie) 9-15. Juni 1993, Max-Planck-Institute preprint für Mathematik preprint series 1993(57).

[Y] K. Yamanoi, Completeness of the automorphism groups of free meta-abelian groups, RIMS preprint series 1221(1999).